



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ Ι

4^ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΗΜΜΥ

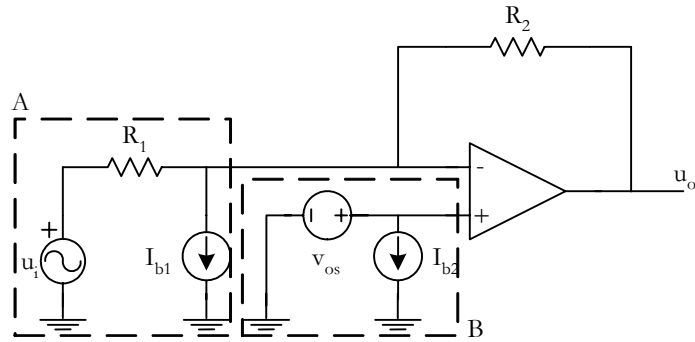
Εαρινό εξάμηνο 2005

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΤΕΛΕΣΤΙΚΟΙ ΕΝΙΣΧΥΤΕΣ

Ν. ΝΑΣΚΑΣ

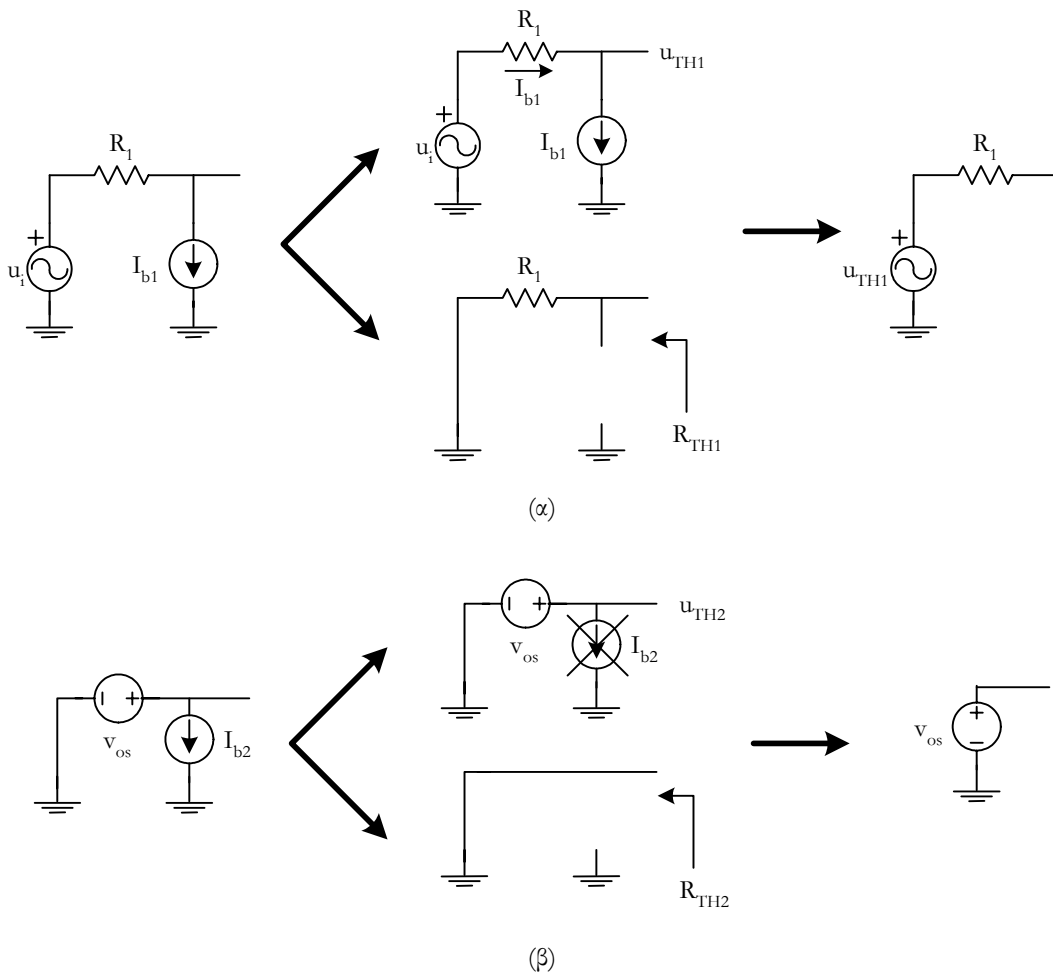
ΛΕΚΤΟΡΑΣ (Π.Δ. 407/80), ΕΜΠ

Άσκηση 1. Να βρεθεί η τάση εξόδου του παρακάτω κυκλώματος. Ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός.



Σχήμα 1. 1

Η ανάλυση του κυκλώματος θα μπορούσε να απλοποιηθεί σημαντικά αν υπολογίζαμε ξεχωριστά τα ισοδύναμα Thevenin των δυο υποκυκλωμάτων A και B. Η τάση Thevenin υπολογίζεται ως η τάση ανοιχτοκύκλωσης του κάθε υποκυκλώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. 2.



Σχήμα 1. 2

Έτσι, για την u_{TH1} έχουμε (το ρεύμα I_{b1} διέρχεται εξολοκλήρου μέσα από την R_1 , καθώς δεν υπάρχει κάποιος άλλος βρόχος στον οποίο να διακλαδίζεται):

$$u_i - I_{b1}R_1 - u_{TH1} = 0 \Rightarrow u_{TH1} = u_i - I_{b1}R_1$$

Για τον υπολογισμό της u_{TH2} παρατηρούμε ότι υπάρχει μια πηγή τάσης παράλληλα με μια πηγή ρεύματος. Ωστόσο, μια ιδανική πηγή τάσης (χωρίς εσωτερική αντίσταση) διατηρεί πάντοτε την τάση στα άκρα της ίση με την ονομαστική της τιμή, οπότε:

$$u_{TH2} = v_{os}$$

Για τον υπολογισμό της αντίστασης Thevenin αρκεί να βραχυκυκλώσουμε τις ανεξάρτητες πηγές τάσης και να ανοιχτοκυκλώσουμε τις ανεξάρτητες πηγές ρεύματος (προσοχή, αν υπήρχαν εξαρτημένες πηγές αυτές δε θα απομακρύνονταν (βραχυκυκλώνονταν ή ανοιχτοκυκλώνονταν)), έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} R_{TH1} &= R_1 \\ R_{TH2} &= 0 \end{aligned}$$

Με βάση τους έως τώρα υπολογισμούς, το αρχικό κύκλωμα είναι ισοδύναμο με αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 1. 3. Το κύκλωμα οδηγείται από δυο ανεξάρτητες πηγές τάσης και η απόκριση του σε αυτές μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια του θεωρήματος της επαλληλίας. Έτσι, βραχυκυκλώνουμε πρώτα τη μία πηγή τάσης και υπολογίζουμε της έξοδο του κυκλώματος που οφείλεται στην άλλη και αντίστροφα (αν υπήρχαν και πηγές ρεύματος τότε αυτές θα έπρεπε όχι να βραχυκυκλωθούν αλλά να ανοιχτοκυκλωθούν). Με βάση τα παραπάνω, το τμήμα του σήματος εξόδου που οφείλεται στην u_{TH1} , είναι:

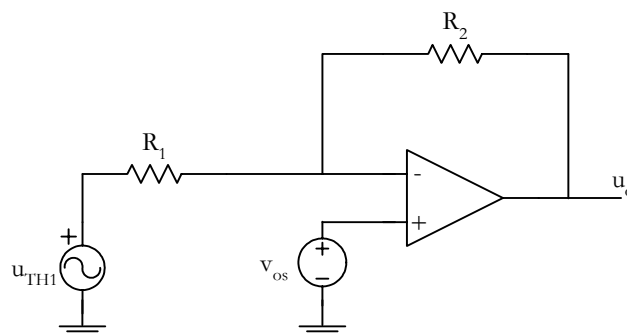
$$u_{o1} = -\frac{R_2}{R_1} u_{TH1} = -\frac{R_2}{R_1} (u_i - I_{b1}R_1) = -\frac{R_2}{R_1} u_i + R_2 I_{b1} \text{ (αναστρέφουσα συνδεσμολογία)}$$

Ενώ, το τμήμα του σήματος εξόδου που οφείλεται στην u_{TH2} , είναι:

$$u_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_{os} \text{ (μη-αναστρέφουσα συνδεσμολογία)}$$

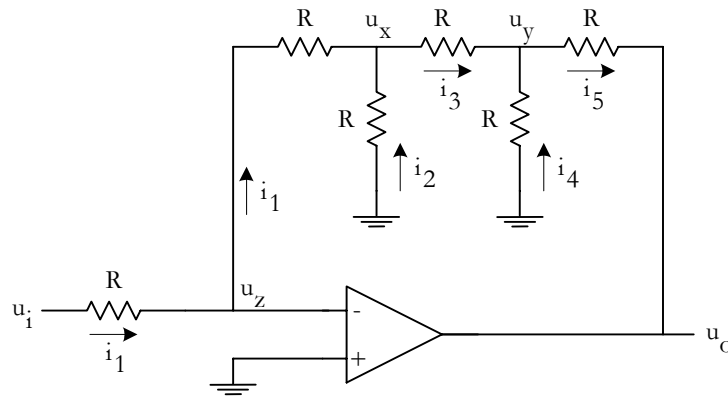
Επομένως, η συνολική τάση εξόδου, θα είναι:

$$u_o = u_{o1} + u_{o2} = -\frac{R_2}{R_1} u_i + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_{os} + R_2 I_{b1}$$



Σχήμα 1. 3

Άσκηση 2. Να βρεθεί το κέρδος τάσης του παρακάτω κυκλώματος. Ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός.



Σχήμα 1. 4

Ο τελεστικός ενισχυτής έχει άπειρο κέρδος τάσης άρα μεταξύ των εισόδων του υπάρχει κατ' ουσίαν βραχυκύκλωμα (virtual short) ή διαφορετικά στη συγκεκριμένη περίπτωση, κατ' ουσίαν γη (virtual ground) καθώς ο μη-αναστρέφωακροδέκτης είναι συνδεδεμένος στη γη, επομένως:

$$u_z = 0 \text{ και } i_1 = \frac{u_i - 0}{R} \Rightarrow u_i = i_1 \cdot R$$

Το ρεύμα i_1 θα κινηθεί όλο προς το δικτύωμα των αντιστάσεων καθώς ο τελεστικός ενισχυτής εμφανίζει άπειρη αντίσταση εισόδου. Στους διάφορους κόμβους και κλάδους του κυκλώματος θα έχουμε:

κόμβος u_x :

$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$u_x - u_z = -i_1 \cdot R = -u_i$$

$$i_2 = \frac{0 - u_x}{R} = \frac{u_i}{R} = i_1$$

$$i_3 = 2i_1$$

κλάδος $u_x - u_y$:

$$u_x - i_3 R - u_y = 0 \Rightarrow u_y = -u_i - 2i_1 R = -3u_i$$

κόμβος u_y :

$$i_5 = i_3 + i_4$$

$$i_4 = -\frac{u_y}{R} = \frac{3u_i}{R} = 3i_1$$

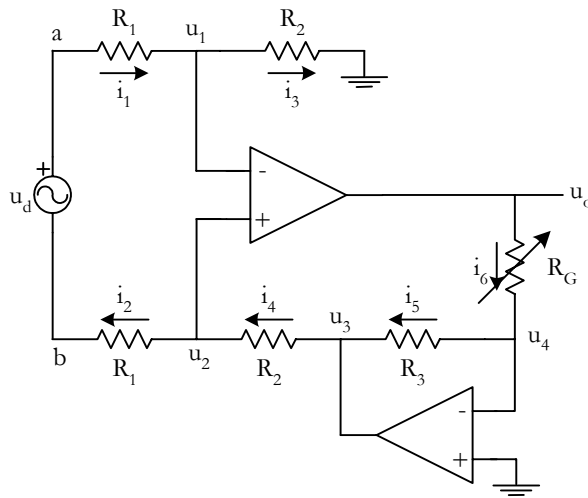
$$i_5 = 2i_1 + 3i_1 = 5i_1$$

κλάδος $u_y - u_o$:

$$u_y - i_5 R - u_o = 0 \Rightarrow u_o = -5i_1 R - 3u_i = -8u_i$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το κέρδος τάσης είναι: $\frac{u_o}{u_i} = -8$

Άσκηση 3. Να βρεθεί το κέρδος τάσης του παρακάτω κυκλώματος. Το κύκλωμα οδηγείται από διαφορικό σήμα εισόδου u_d (οι τελεστικοί ενισχυτές θεωρούνται ιδανικοί).



Σχήμα 1. 5

Ο τελεστικός ενισχυτής έχει άπειρο κέρδος τάσης άρα μεταξύ των εισόδων του υπάρχει κατ' ουσίαν βραχυκύκλωμα, επομένως:

$$u_1 = u_2$$

Λόγω της διαφορικής πηγής που οδηγεί το κύκλωμα έχουμε:

$$i_1 = i_2$$

και (βρόχος a-u₁-u₂-b):

$$i_1 = i_2 = \frac{u_d}{2R_1}$$

Ο τελεστικός ενισχυτής εμφανίζει άπειρη αντίσταση εισόδου με αποτέλεσμα να μην εισέρχεται ρεύμα στους ακροδέκτες εισόδου του, οπότε:

$$i_1 = i_3 \text{ και } i_2 = i_4$$

Εξάλλου ισχύουν τα ακόλουθα:

κόμβος u₁:

$$u_1 = i_3 R_2 = i_1 R_2$$

κλάδος u₃- u₂:

$$i_4 = \frac{u_3 - u_2}{R_2} \Rightarrow u_3 = \frac{R_2}{R_1} u_d$$

$$u_4 = 0 \text{ (λόγω κατ' ουσίαν γης)}$$

κλάδος u₄- u₃:

$$i_5 = \frac{u_4 - u_3}{R_3} = \frac{0 - u_3}{R_3} = -\frac{R_2}{R_3 R_1} u_d$$

$$i_5 = i_6$$

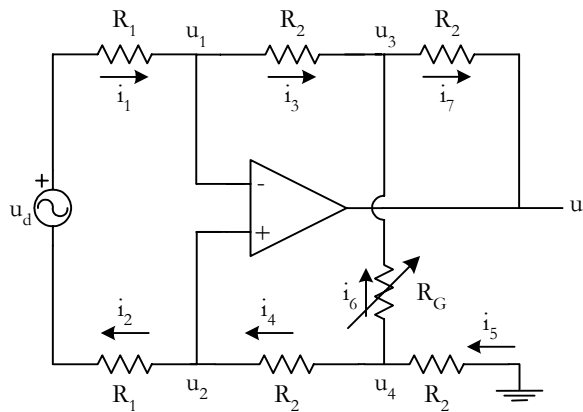
κλάδος $u_o - u_4$:

$$i_6 = \frac{u_o - u_4}{R_G} = \frac{u_o}{R_G} \Rightarrow u_o = -\frac{R_2 R_G}{R_3 R_1} u_d$$

Οπότε το κέρδος τάσης είναι ίσο με:

$$\frac{u_o}{u_d} = -\frac{R_2 R_G}{R_3 R_1}$$

Άσκηση 4. Να βρεθεί το κέρδος τάσης του παρακάτω κυκλώματος. Το κύκλωμα οδηγείται από διαφορικό σήμα εισόδου u_d (ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός).



Σχήμα 1. 6

Ο τελεστικός ενισχυτής έχει άπειρο κέρδος τάσης άρα μεταξύ των εισόδων του υπάρχει κατ' ουσίαν βραχυκύκλωμα και επομένως:

$$u_1 = u_2$$

Λόγω της διαφορικής πηγής που οδηγεί το κύκλωμα έχουμε:

$$i_1 = i_2$$

και

$$i_1 = i_2 = \frac{u_d}{2R_1}$$

Επίσης, λόγω της άπειρης αντίστασης εισόδου του τελεστικού ενισχυτή, ισχύει ότι:

$$i_3 = i_1 \text{ και } i_4 = i_2$$

Επιπλέον:

κόμβος u_3 :

$$i_7 = i_6 + i_3$$

κλάδος $u_4 - u_2 - u_1 - u_3$: $u_4 - i_4 R_2 - i_3 R_2 - u_3 = 0 \Rightarrow u_4 - u_3 = \frac{R_2}{R_1} u_d$

κλάδος $u_4 - u_3$: $i_6 = \frac{u_4 - u_3}{R_G} = \frac{R_2}{R_1 R_G} u_d$

άρα: $i_7 = \frac{R_2}{R_1 R_G} u_d + \frac{u_d}{2R_1}$

κόμβος u_4 : $i_5 = i_6 + i_4$

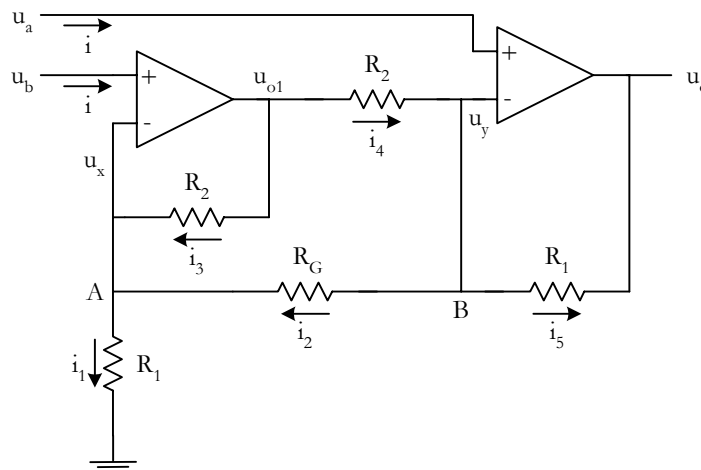
λόγω του ότι $i_3 = i_4$: $i_7 = i_5$

κλάδος $u_4 - u_3 - u_o$: $-i_5 R_2 - (u_4 - u_3) - i_7 R_2 - u_o = 0$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$\frac{u_o}{u_d} = -2 \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_G}\right)$$

Άσκηση 5. Να βρεθεί το κέρδος τάσης και η αντίσταση εισόδου του παρακάτω κυκλώματος καθώς και ενός απλού τελεστικού ενισχυτή σε αναστρέφουσα συνδεσμολογία. Πως αλλάζει το κέρδος των κυκλωμάτων αυτών όταν η πηγή του σήματος εισόδου δεν είναι ιδανική αλλά έχει αντίσταση εξόδου R_s ; (οι τελεστικοί ενισχυτές θεωρούνται ιδανικοί)



Σχήμα 1. 7

Οι τελεστικοί ενισχυτές έχουν άπειρο κέρδος τάσης οπότε μεταξύ των εισόδων τους υπάρχει κατ' ουσίαν βραχυκύκλωμα και επομένως:

$$u_x = u_b$$

$$u_y = u_a$$

Με βάση τη φορά των ρευμάτων στο σχήμα, έχουμε:

$$\text{κόμβος A:} \quad i_1 = i_2 + i_3$$

επίσης ισχύει ότι:

$$i_1 = \frac{u_b}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{u_a - u_b}{R_G}$$

$$i_3 = \frac{u_{o1} - u_b}{R_2}$$

συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$u_{o1} = \frac{R_2}{R_1} u_b - \frac{R_2}{R_G} (u_a - u_b) + u_b$$

$$\text{κόμβος B:} \quad i_4 = i_2 + i_5$$

εξάλλου,

$$i_4 = \frac{u_{o1} - u_a}{R_2}$$

$$i_5 = \frac{u_a - u_o}{R_1}$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες σχέσεις έχουμε για το κέρδος της διάταξης:

$$\frac{u_o}{u_d} = \left(1 + \frac{2R_1}{R_G} + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\text{όπου } u_d = (u_a - u_b)$$

Η διαφορική αντίσταση εισόδου του κυκλώματος θα είναι:

$$R_i = \frac{u_d}{i}$$

όμως $i=0$ καθώς οι τελεστικοί ενισχυτές έχουν άπειρη αντίσταση εισόδου, οπότε:

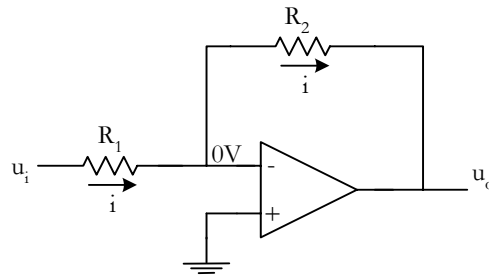
$$R_i = \frac{u_d}{0} \rightarrow \infty$$

Όταν στην είσοδο εφαρμόζεται μια μη-ιδανική πηγή τάσης u_d με αντίσταση εξόδου R_s δεν αλλάζει κάτι στο κέρδος του κυκλώματος γιατί η πτώση τάσης πάνω στην R_s είναι μηδενική (το ρεύμα εισόδου είναι μηδενικό λόγω της άπειρης αντίστασης εισόδου).

Στην περίπτωση ενός απλού τελεστικού ενισχυτή σε αναστρέφουσα συνδεσμολογία έχουμε σύμφωνα με το Σχήμα 1. 8 ότι:

$$i = \frac{u_i - 0}{R_1} \quad \text{ή} \quad R_1 = \frac{u_i}{i}$$

Εξάλλου, η αντίσταση εισόδου του κυκλώματος ορίζεται ως:



Σχήμα 1. 8

$$R_i = \frac{u_i}{i}$$

συνεπώς, $R_i = R_1$ (πεπερασμένη τιμή αντίστασης εισόδου)

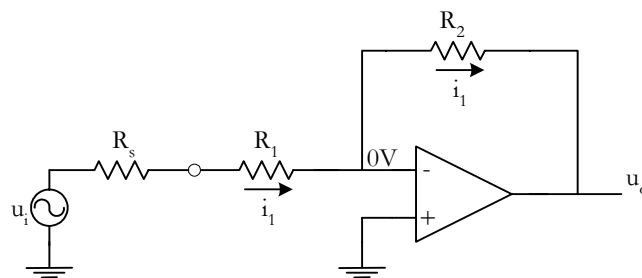
Το κέρδος τάσης δίνεται, κατά τα γνωστά, από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{u_o}{u_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Όταν στην είσοδο του κυκλώματος εφαρμόζεται μια μη-ιδανική πηγή τάσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. 9, τότε υπάρχει μη μηδενικό ρεύμα i_1 που διαρρέει την R_s (λόγω της πεπερασμένης αντίστασης εισόδου του) και το οποίο δημιουργεί πτώση τάσης πάνω της με αποτέλεσμα τη μεταβολή του κέρδους. Στην περίπτωση αυτή, το κέρδος τάσης διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{u_o}{u_i} = -\frac{R_2}{R_1 + R_s}$$

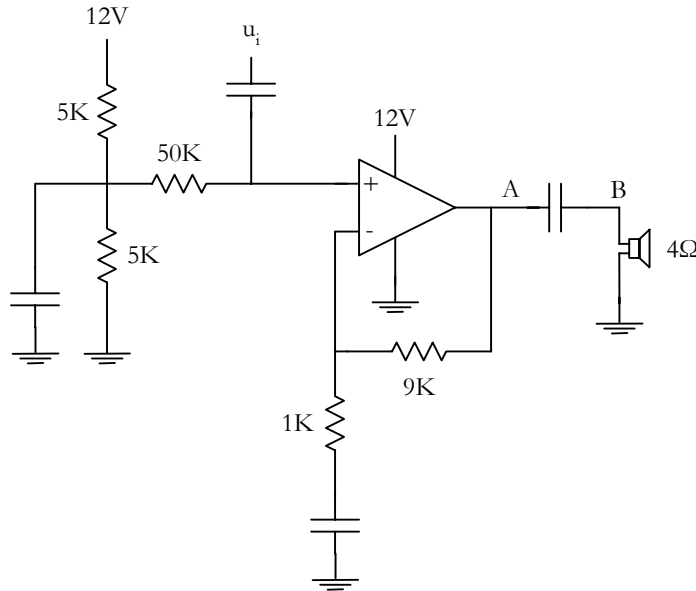
(παρατηρήστε τη σπουδαιότητα που έχει η αντίσταση εισόδου του ενισχυτή όταν πρόκειται να ενισχυθούν σήματα που προέρχονται από πηγές τάσης με μεγάλη εσωτερική αντίσταση)



Σχήμα 1. 9

Άσκηση 6. Δίνεται το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος το οποίο θα μπορούσε να αποτελέσει τον ενισχυτή ακουστικών συχνοτήτων ενός αυτοκινήτου. Να βρεθεί η τάση στα σημεία Α και Β και να σχεδιαστεί η τάση στον κόμβο Α συναρτήσει της πηγής u_i . Ποιο είναι το μέγιστο ασφαλιστικό πλάτος της τάσης εξόδου και ποια η μέγιστη rms ισχύς στο φορτίο; Σχεδιάστε την κυματομορφή της τάσης εξόδου (στο φορτίο) για ένα σήμα εισόδου $1.2V_{pp}$. Ο τελεστικός ενισχυτής

τροφοδοτείται από μονό τροφοδοτικό 12V και ψαλλιδίζει την τάση εξόδου 1V ‘μακριά’ από τα όρια τροφοδοσίας του, επίσης έχει άπειρη αντίσταση εισόδου, μηδενική αντίσταση εξόδου και άπειρο κέρδος ανοιχτού βρόχου. Οι πυκνωτές έχουν πολύ μεγάλη τιμή, ώστε να μπορούν να θεωρηθούν βραχυκύκλωμα στα ac σήματα.



Σχήμα 1. 10

Τα όρια τροφοδοσίας του τελεστικού ενισχυτή καθορίζουν τη μέγιστη (ή ελάχιστη) τάση εξόδου. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα τα όρια αυτά είναι: (12-1)V (άνω όριο) και (0+1)V (κάτω όριο). Έτσι, η τάση στο σημείο A δε μπορεί να ξεπεράσει τα όρια [1, 11]V.

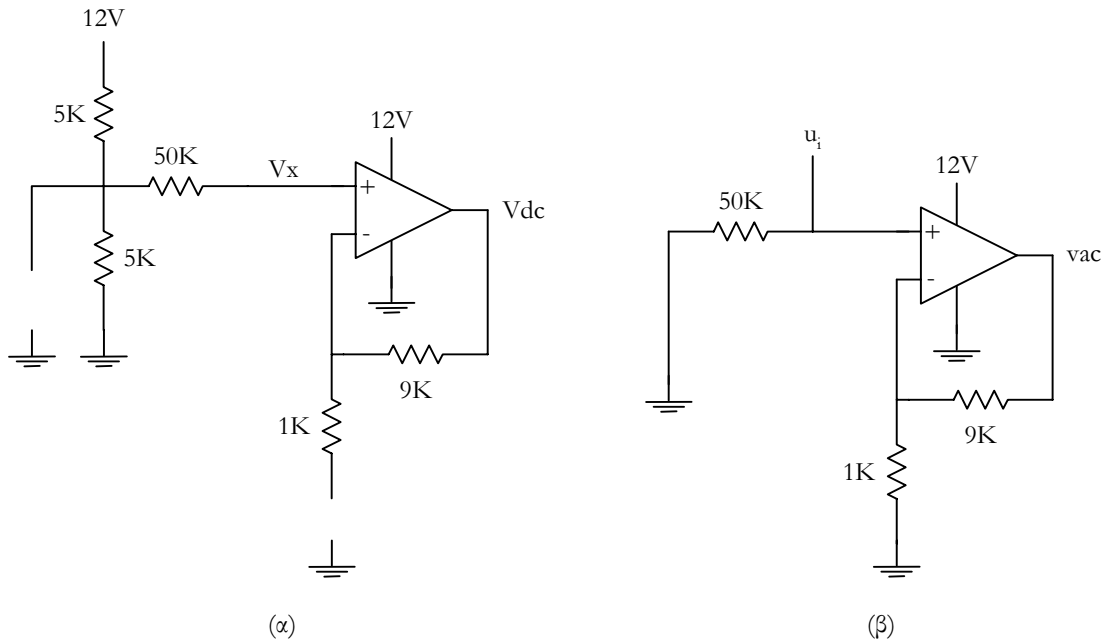
Παρατηρούμε ότι το κύκλωμα οδηγείται ουσιαστικά από δυο πηγές τάσης μια ac (\$u_i\$) και μια dc (αυτή προκύπτει από το διαιρέτη τάσης των αντιστάσεων 5K) και η ανάλυση του μπορεί να απλοποιηθεί με τη βοήθεια του θεωρήματος της επαλληλίας. Η ειδική αυτή περίπτωση κατά την οποία υπολογίζεται η απόκριση του κυκλώματος κάτω από την επίδραση μόνο της dc πηγής (ή των dc πηγών αν υπήρχαν περισσότερες) ονομάζεται dc ανάλυση και δίνει στην πραγματικότητα τις τάσεις και τα ρεύματα ισορροπίας του κυκλώματος. Αντίστοιχα, η ανάλυση του κυκλώματος κάτω από την επίδραση μόνο των ac πηγών (έχοντας βραχυκυκλώσει ή ανοιχτοκυκλώσει τις dc πηγές τάσης ή ρεύματος, αντίστοιχα) ονομάζεται ac ανάλυση (γενικά κατά την ac ανάλυση πραγματοποιείται και μια διαδικασία γραμμικοποίησης περί του σημείου ισορροπίας αν πρόκειται για μη γραμμικό κύκλωμα).

Αρχικά υπολογίζουμε την απόκριση του κυκλώματος στον κόμβο A.

DC ανάλυση: το κύκλωμα παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 1. 11(α) (θυμηθείτε ότι ο πυκνωτής είναι ανοιχτοκύκλωμα σε dc σήματα). Η τάση \$V_x\$ ισούται με:

$$V_x = \frac{5}{5+5} 12 = 6V$$

Ο τελεστικός ενισχυτής βρίσκεται σε συνδεσμολογία απομονωτή, οπότε:



Σχήμα 1. 11

$$V_{dc} = V_x$$

AC ανάλυση: το κύκλωμα παίρνει την ισοδύναμη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 1. 11(β) (με βάση την εκφώνηση οι πυκνωτές έχουν πολύ μεγάλη τιμή οπότε δρουν ως βραχυκύκλωμα). Η τάση εξόδου ισούται με:

$$v_{ac} = \left(1 + \frac{9}{1}\right)u_i = 10u_i \text{ (μη-αναστρέφουσα συνδεσμολογία)}$$

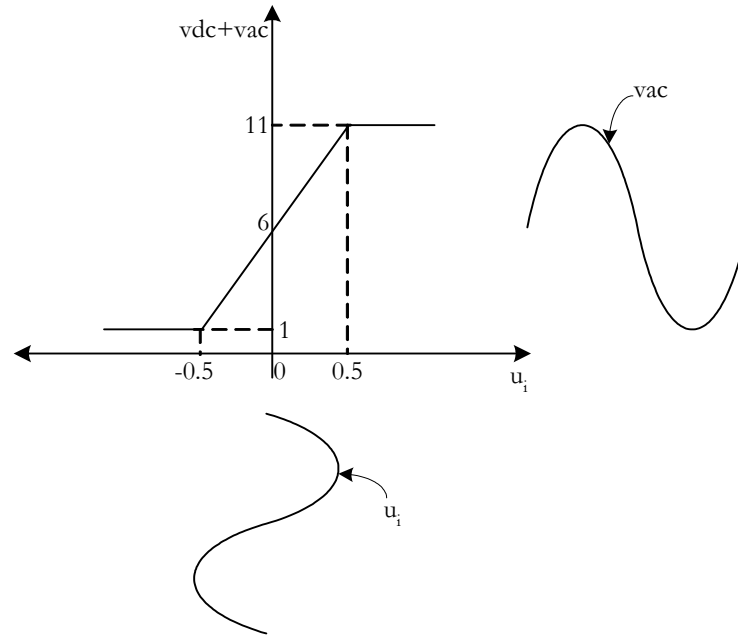
Το συνολικό σήμα στον κόμβο A θα είναι:

$$V_{dc} + v_{ac} = 6 + 10u_i$$

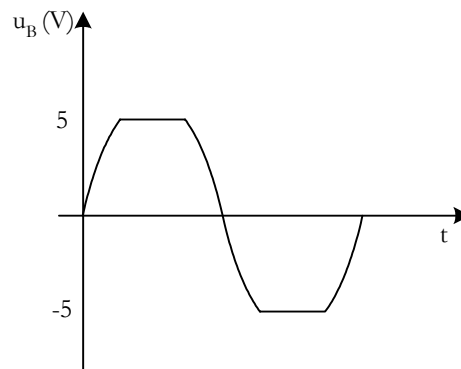
Λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω σχέση αλλά και το γεγονός ότι το σήμα εξόδου δε μπορεί να ξεπεράσει τα όρια [1, 11]V, η χαρακτηριστική εξόδου στον κόμβο A θα είναι αυτή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. 12. Όπως φαίνεται το μέγιστο πλάτος της τάσης εξόδου είναι (11-6)V. Επιπλέον, η τάση στο σημείο B είναι: $u_B = 10u_i$ (ο πυκνωτής στην έξοδο μπλοκάρει το dc σήμα). Με βάση τα παραπάνω η μέγιστη rms ισχύς στο φορτίο θα είναι:

$$P_{\max(rms)} = \frac{\left(\frac{11-6}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1.57W$$

Τέλος, στο Σχήμα 1. 13 παρουσιάζεται η κυματομορφή της τάσης εξόδου για ένα σήμα εισόδου πλάτους 0.6V (ή 1.2Vpp).

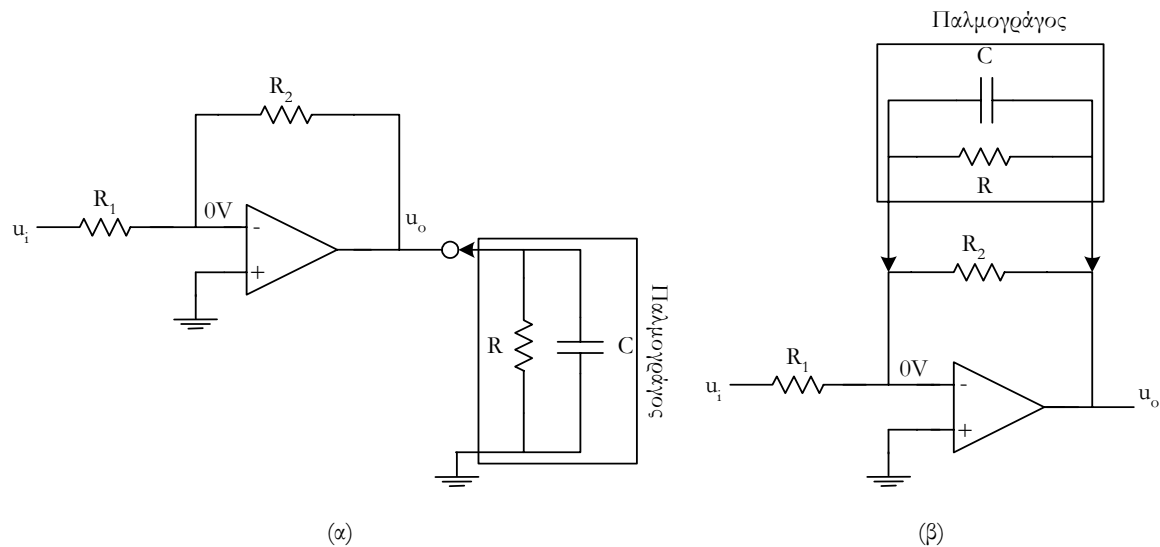


Σχήμα 1. 12



Σχήμα 1. 13

Άσκηση 7. Με τη βοήθεια παλμογράφου μετράται η τάση εξόδου του παρακάτω κυκλώματος με δυο διαφορετικού τρόπους. Σύμφωνα με τον πρώτο τρόπο μετράται η τάση μεταξύ της εξόδου και της γης (Σχήμα 1. 14(α)), ενώ με βάση το δεύτερο τρόπο μετράται η τάση μεταξύ της εξόδου και της εικονικής γης (Σχήμα 1. 14(β)). Ποια μέθοδος δίνει πρακτικά το πιο αξιόπιστο αποτέλεσμα; Ο παλμογράφος εμφανίζει σύνθετη αντίσταση εισόδου $R//C$ και ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός.



Σχήμα 1. 14

Με βάση τη θεωρητική ανάλυση η τάση εξόδου ισούται με:

$$u_o = -\frac{R_2}{R_1} u_i$$

α) Όταν ο παλμογράφος συνδέεται όπως στο Σχήμα 1. 14(α) (και εφόσον ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός) δεν υπάρχει καμία επίδραση στο κύκλωμα από την εσωτερική του αντίσταση. Οπότε η τιμή της τάσης εξόδου που θα μετρηθεί ταυτίζεται με αυτή που δίνει η θεωρητική ανάλυση.

β) Στη δεύτερη περίπτωση, παρατηρούμε πως η εσωτερική αντίσταση του παλμογράφου παραλληλίζεται με την αντίσταση R_2 , οπότε η τάση εξόδου δίνεται πλέον από το λόγο της σύνθετης αντίστασης ανάδρασης Z_2 προς την R_1 ή αναλυτικότερα:

$$u_o = -\frac{Z_2}{R_1} u_i = -\frac{1}{R_1 Y_2}$$

όπου,

$$Y_2 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} + j\omega C$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

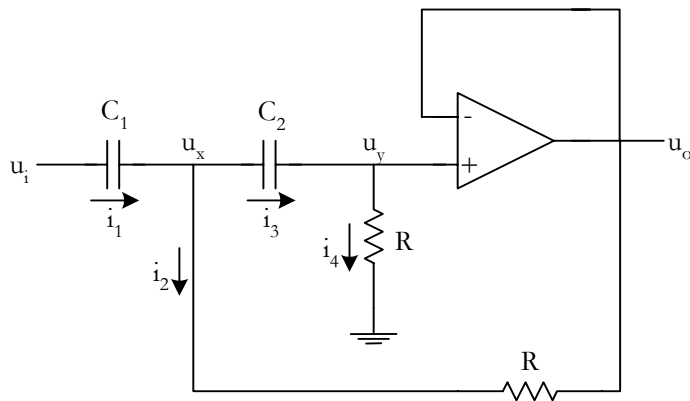
$$u_o = -\frac{1}{R_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} + j\omega C \right)} u_i = -\frac{R_2 R}{R_1 (R + R_2)} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C \frac{R_2 R}{R_1 (R + R_2)}} u_i$$

Παρατηρείστε ότι στην περίπτωση αυτή το κέρδος τάσης του κυκλώματος έχει αλλάξει και μάλιστα εξαρτάται από τη συχνότητα. Η συμπεριφορά του δε, είναι χαμηλοδιαβατή ενός πόλου, με συχνότητα πόλου:

$$\omega_p = \frac{1}{C \frac{R_2 R}{R_1 (R + R_2)}}$$

(Το παραπάνω παράδειγμα φανερώνει ένα από τα βασικά προβλήματα που αντιμετωπίζει κάποιος κατά τη διαδικασία μέτρησης ενός μεγέθους, αυτό δηλαδή της επίδρασης που έχει το ίδιο το όργανο μέτρησης στο μετρούμενο αποτέλεσμα.)

Άσκηση 8. Να βρεθεί το κέρδος τάσης του παρακάτω κυκλώματος. Ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός.



Σχήμα 1. 15

Λόγω του άπειρου κέρδους του τελεστικού ενισχυτή μεταξύ των εισόδων του υπάρχει κατ' ουσίαν βραχυκύκλωμα, οπότε:

$$u_y = u_o$$

Στους διάφορους κόμβους και βρόχους του κυκλώματος έχουμε:

κόμβος u_y :

$$i_3 = i_4$$

$$i_4 = \frac{u_o}{R}$$

$$i_3 = \frac{u_x - u_o}{Z_{C_2}}$$

από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$u_x = u_o \left(1 + \frac{Z_{C_2}}{R}\right)$$

κόμβος u_x :

$$i_1 = i_2 + i_3 = i_2 + i_4$$

$$i_1 = \frac{u_i - u_x}{Z_{C1}}$$

$$i_2 = \frac{u_x - u_0}{R}$$

Οπότε:

$$\frac{u_i - u_x}{Z_{C1}} = \frac{u_x - u_0}{R} + \frac{u_0}{R}$$

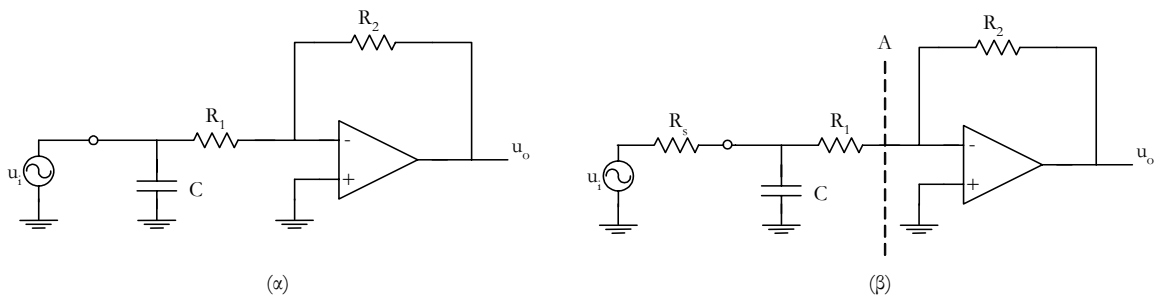
ή

$$\frac{u_0}{u_i} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j\omega RC_1}\right)\left(1 + \frac{1}{j\omega RC_2}\right)}$$

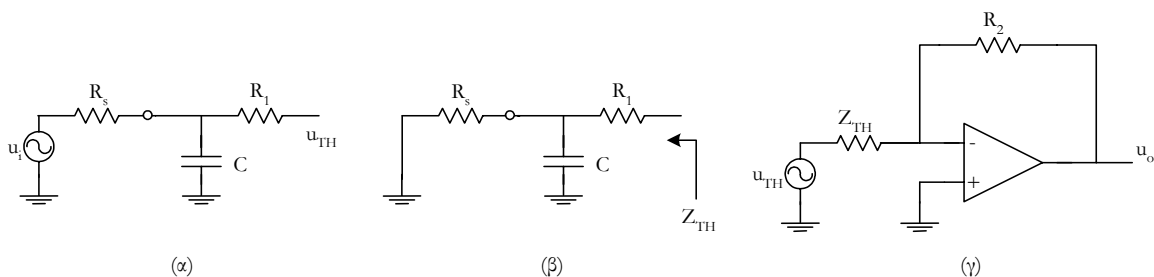
Το κύκλωμα παρουσιάζει υψιπερατή συμπεριφορά δύο πόλων, με πόλους στις συχνότητες:

$$\omega_{p1} = \frac{1}{RC_1} \quad \text{και} \quad \omega_{p2} = \frac{1}{RC_2}$$

Άσκηση 9. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω κυκλώματος όταν, α) αυτό οδηγείται από ιδανική πηγή τάσης και β) όταν η πηγή τάσης έχει εσωτερική αντίσταση R_s . Να σχεδιαστεί η απόκριση πλάτους και φάσης στη δεύτερη περίπτωση. Ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός.



Σχήμα 1. 16



Σχήμα 1. 17

α) Στην πρώτη περίπτωση παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας πυκνωτής παράλληλα με μια ιδανική πηγή τάσης, ο πυκνωτής πάντοτε θα παρακολουθεί την τάση της πηγής και είναι ουσιαστικά σα να μην υπάρχει στο κύκλωμα. Έτσι, το κύκλωμα απλοποιείται στη γνωστή αναστρέφουσα τοπολογία και το κέρδος τάσης του είναι:

$$\frac{u_o}{u_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

β) Η ανάλυση του κυκλώματος μπορεί να αποποιηθεί αν υπολογίσουμε το ισοδύναμο Thevenin στη αριστερή πλευρά της τομής Α. Η τάση Thevenin (Σχήμα 1. 17(α)) δίνεται από το διαιρέτη τάσης R_s, C (η R_1 δεν έχει καμία επίδραση καθώς δε διαρρέετε από ρεύμα) και είναι:

$$u_{TH} = \frac{Z_c}{R_s + Z_c} u_i = \frac{1}{1 + j\omega R_s C} u_i$$

Η σύνθετη αντίσταση Thevenin υπολογίζεται αν βραχυκυκλώσουμε την u_i όπως στο Σχήμα 1. 17(β):

$$Z_{TH} = \frac{R_s Z_c}{R_s + Z_c} + R_1 = \frac{R_s \frac{1}{j\omega C}}{R_s + \frac{1}{j\omega C}} + R_1 = \frac{R_s + R_1(1 + j\omega R_s C)}{1 + j\omega R_s C}$$

Το κύκλωμα παίρνει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 1. 17(γ) και η τάση εξόδου του είναι:

$$u_o = -\frac{R_2}{Z_{TH}} u_{TH} = -\frac{R_2}{\frac{R_s + R_1(1 + j\omega R_s C)}{1 + j\omega R_s C}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_s C} u_i = -\frac{R_2 / (R_s + R_1)}{1 + j\omega \left(\frac{R_1 R_s}{R_s + R_1} \right) C} u_i$$

$$\dot{\eta} \quad \frac{u_o}{u_i}(j\omega) = -\frac{R_2 / (R_s + R_1)}{1 + j\omega \left(\frac{R_1 R_s}{R_s + R_1} \right) C} = \frac{-A}{1 + j\omega BC}$$

$$\text{όπου, } A = \frac{R_2}{R_s + R_1} \text{ και } B = \frac{R_1 R_s}{R_s + R_1}.$$

Με βάση τη θεωρία των μιγαδικών αριθμών το μιγαδικό κέρδος του συστήματος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{u_o}{u_i}(j\omega) = \frac{|-A|}{|1 + j\omega BC|} \cdot \frac{\angle(-A)}{\angle(1 + j\omega BC)} = \frac{|-A|}{|1 + j\omega BC|} \cdot [\angle(-A) - \angle(1 + j\omega BC)]$$

Για τη σχεδίαση της απόκρισης πλάτους ασχολούμαστε με το μέτρο του κέρδους:

$$\left| \frac{u_o}{u_i}(j\omega) \right| = \frac{|-A|}{|1 + j\omega BC|}$$

και ψάχνουμε ακρότατα για διάφορες τιμές της ω (συνήθως τέτοιες τιμές είναι οι πόλοι και τα μηδενικά, καθώς και η μηδενική και άπειρη συχνότητα), έχουμε έτσι:

$$1) \omega=0, \left| \frac{u_o}{u_i}(j0) \right| = \frac{|-A|}{|1+j0BC|} = A$$

$$2) \omega=\omega_p, \left| \frac{u_o}{u_i}(j\omega_p) \right| = \frac{|-A|}{|1+j\omega_p BC|} = \frac{|-A|}{|1+j1|} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (\text{το } \sqrt{2} \text{ στον παρονομαστή προοιαλεί μια μείωση του DC κέρδους κατά 3dB - θυμηθείτε ότι στους πόλους το κέρδους πέφτει κατά 3dB ή η ισχύς του σήματος υποδιπλασιάζεται). Η συχνότητα του πόλου ισούται με: } \omega_p = \frac{1}{BC}.$$

$$3) \omega \rightarrow \infty, \left| \frac{u_o}{u_i}(j\infty) \right| = \frac{|-A|}{|1+j\infty BC|} = \frac{A}{|j\infty|} = 0$$

Για τη σχεδίαση της απόκρισης φάσης ασχολούμαστε με τη φάση του μιγαδικού κέρδους:

$$\angle \frac{u_o}{u_i}(j\omega) = (\angle -A) - (\angle 1 + j\omega BC)$$

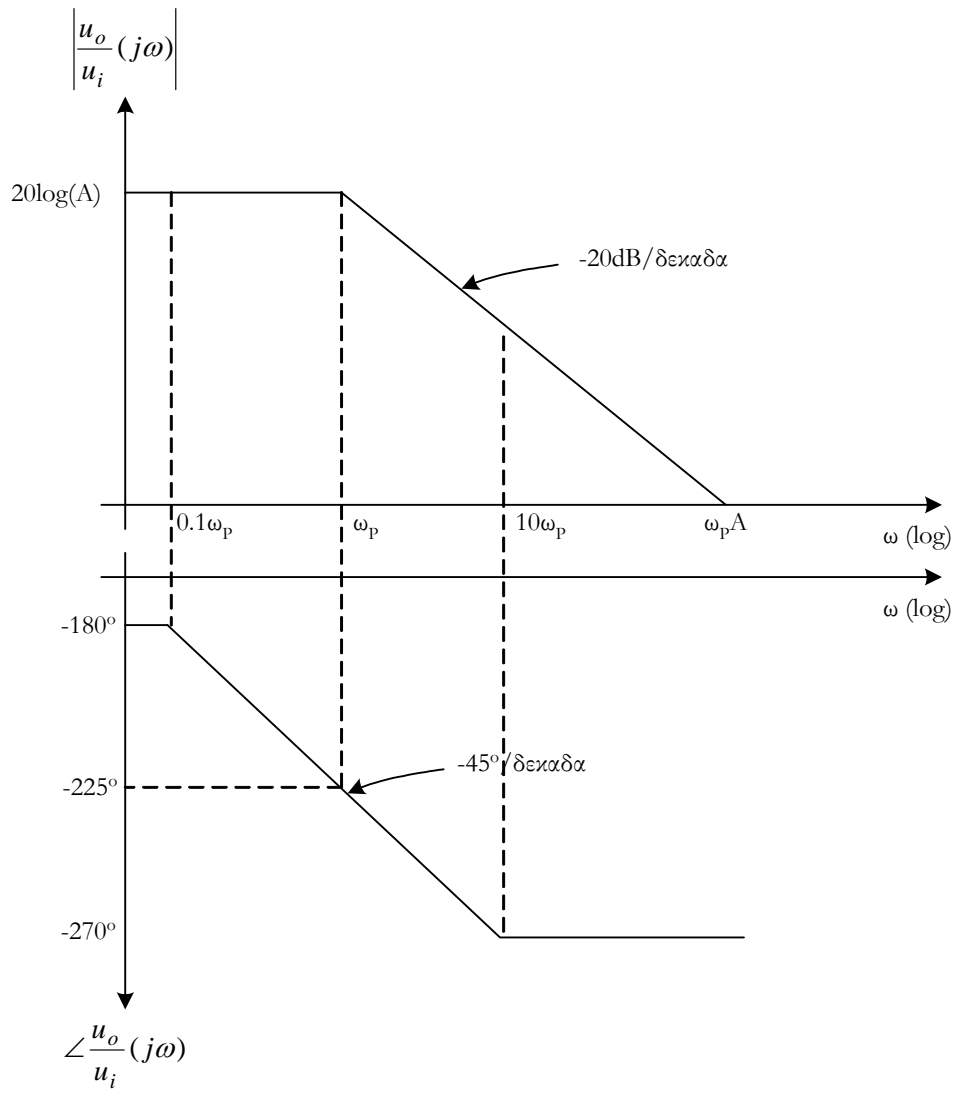
οπότε έχουμε:

$$1) \omega=0, \angle \frac{u_o}{u_i}(j0) = (\angle -A) - (\angle 1 + j0) = -180^\circ - 0^\circ = -180^\circ$$

$$2) \omega=\omega_p, \angle \frac{u_o}{u_i}(j\omega_p) = (\angle -A) - (\angle 1 + j1) = -180^\circ - 45^\circ = -225^\circ$$

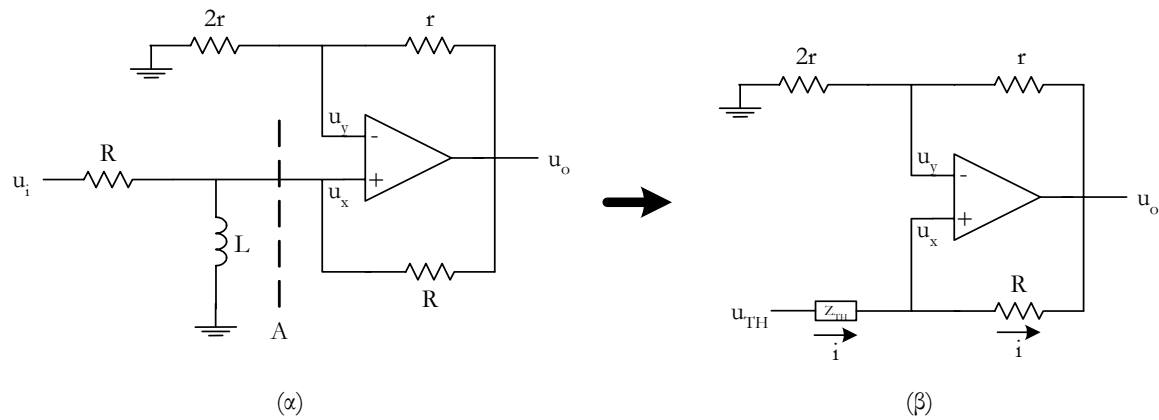
$$3) \omega \rightarrow \infty, \angle \frac{u_o}{u_i}(j\infty) = (\angle -A) - (\angle 1 + j\infty) = -180^\circ - 90^\circ = -270^\circ$$

Το Σχήμα 1. 18 παρουσιάζει την απόκριση πλάτους και φάσης του κυκλώματος (ο άξονας των συχνοτήτων είναι εκφρασμένος σε λογαριθμική κλίμακα). Παρατηρείστε ότι το μέτρο φθίνει με ένα ρυθμό -20dB/δεκάδα (σύστημα ενός πόλου ή πρώτης τάξης). Αν το κύκλωμα ήταν μεγαλύτερης τάξης ή διαφορετικά περισσότερων πόλων, τότε το μέτρο του πλάτους θα έφθινε με κλίση -20dB/δεκάδα στην περιοχή των συχνοτήτων από τον πρώτο μέχρι τον δεύτερο πόλο περίπου, στη συνέχεια θα έφθινε με κλίση -40dB/δεκάδα στην περιοχή μεταξύ του δεύτερου και του τρίτου πόλου, μετά με κλίση -60dB/δεκάδα μεταξύ τρίτου και τετάρτου πόλου κ.ο.κ. (η προσέγγιση αυτή ισχύει ικανοποιητικά για $\omega_{p1} \ll \omega_{p2} \ll \omega_{p3} \ll \omega_{p4} \dots$).



Σχήμα 1. 18

Άσκηση 10. Να βρεθεί το κέρδος τάσης του παρακάτω κυκλώματος. Επίσης, να σχεδιαστεί η απόκριση πλάτους και φάσης. Ο τελεστικός ενισχυτής θεωρείται ιδανικός.



Σχήμα 1. 19

Η ανάλυση του κυκλώματος θα μπορούσε να απλοποιηθεί αν υπολογίζαμε το ισοδύναμο Thevenin του υποκυκλώματος που βρίσκεται αριστερά της τομής A. Η τάση Thevenin δίνεται από το διαιρέτη τάσης των R, L:

$$u_{TH} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} u_i$$

Η σύνθετη αντίσταση Thevenin δίνεται από το παραλληλισμό των R, L:

$$Z_{TH} = \frac{Rj\omega L}{R + j\omega L}$$

Μετά τον υπολογισμό του ισοδύναμου Thevenin το κύκλωμα παίρνει την ισοδύναμη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 1. 19. Για το κύκλωμα αυτό έχουμε:

$$u_y = u_x$$

$$u_y = \frac{2r}{r + 2r} u_o = \frac{2u_o}{3}$$

$$i = \frac{u_{TH} - u_x}{Z_{TH}} = \frac{u_{TH} - 2u_o/3}{Z_{TH}}$$

$$i = \frac{u_x - u_o}{R} = -\frac{1}{3} \frac{u_o}{R}$$

οπότε:

$$\frac{u_{TH} - 2u_o/3}{Z_{TH}} = -\frac{1}{3} \frac{u_o}{R} \Rightarrow \frac{u_o}{u_i} = \frac{3}{1 + \frac{2R}{j\omega L}}$$

Για τη σχεδίαση του μέτρου και της φάσης του κέρδους, έχουμε (παρατηρήστε ότι το κύκλωμα έχει έναν μόνο πόλο στη συχνότητα $\omega_p = \frac{2R}{L}$):

Απόκριση πλάτους (Σχήμα 1. 20):

$$1) \omega=0, \left| \frac{u_o}{u_i}(j0) \right| = \frac{|3|}{|1-j\infty|} = 0$$

$$2) \omega=\omega_p, \left| \frac{u_o}{u_i}(j\omega_p) \right| = \frac{|3|}{\left| 1 + \frac{2R}{j\omega_p L} \right|} = \frac{3}{|1-j1|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

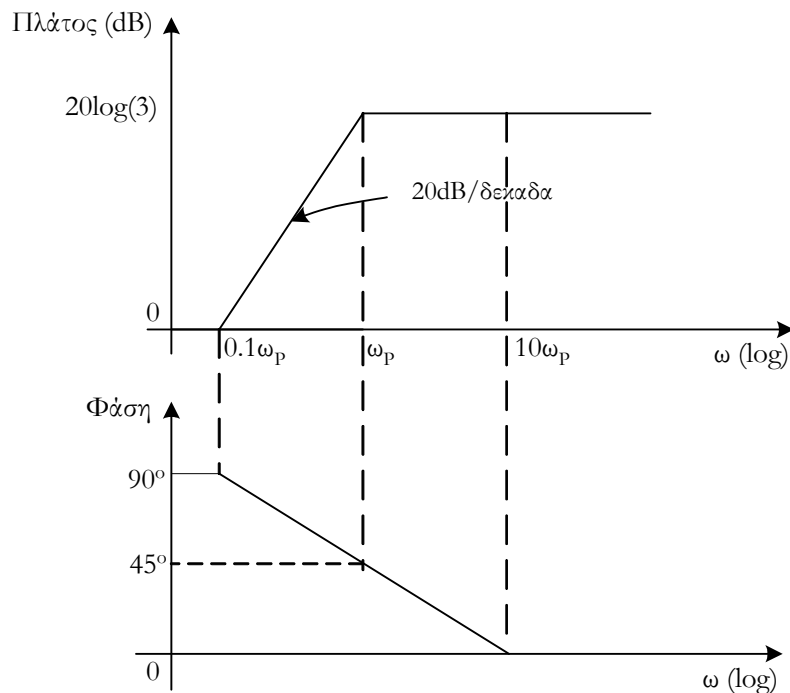
$$3) \omega \rightarrow \infty, \left| \frac{u_o}{u_i}(j\infty) \right| = \frac{|3|}{|1-j0|} = 3$$

Απόκριση φάσης (Σχήμα 1. 20):

$$1) \omega=0, \angle \frac{u_o}{u_i}(j0) = \frac{\angle 3}{\angle 1-j\infty} = (\angle 3) - (\angle 1-j\infty) = 0^\circ - (-90^\circ) = 90^\circ$$

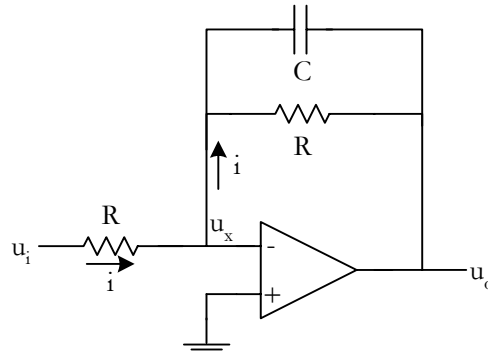
$$2) \omega=\omega_p, \angle \frac{u_o}{u_i}(j\omega_p) = \frac{\angle 3}{\angle 1-j} = (\angle 3) - (\angle 1-j) = 0^\circ - (-45^\circ) = 45^\circ$$

$$3) \omega \rightarrow \infty, \angle \frac{u_o}{u_i}(j\infty) = \frac{\angle 3}{\angle 1-j0} = (\angle 3) - (\angle 1-j0) = 0^\circ - 0^\circ = 0^\circ$$



Σχήμα 1. 20

Άσκηση 11. Να βρεθεί αναλυτικά το κέρδος τάσης του παρακάτω κυκλώματος. Ο τελεστικός ενισχυτής έχει άπειρη αντίσταση εισόδου, μηδενική αντίσταση εξόδου και πεπερασμένο κέρδος ανοιχτού βρόχου A .



Σχήμα 1. 21

Λόγω του πεπερασμένου κέρδους A δεν ισχύει η κατ' ουσίαν γη και η τάση u_x είναι μη μηδενική. Η τάση εξόδου ισούται με:

$$u_o = A(0 - u_x) \Rightarrow u_x = -\frac{u_o}{A}$$

εξάλλου,

$$i = \frac{u_i - u_x}{R} = \frac{u_x - u_o}{Z}$$

όπου $Z = R // \frac{1}{j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$

συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

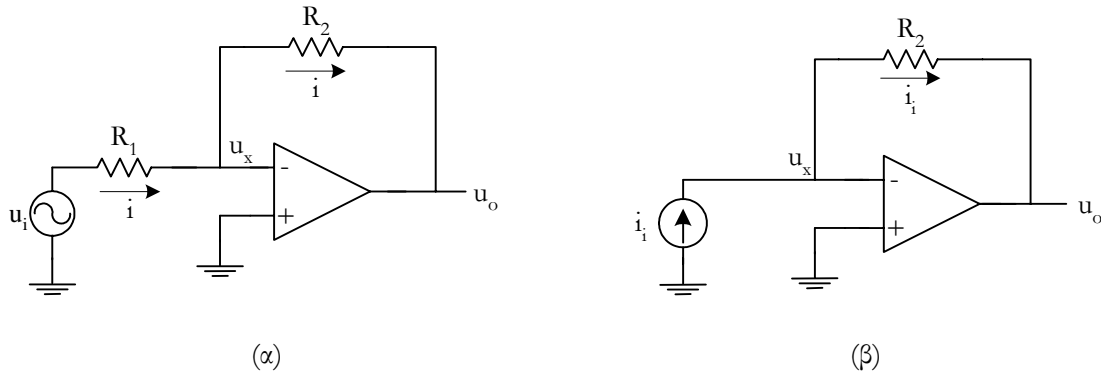
$$\frac{u_o}{u_i} = -\frac{AZ}{Z + (1 + A)R} = -\frac{\frac{1}{1 + 2/A}}{1 + j\omega RC \left[\frac{1 + 1/A}{1 + 2/A} \right]}$$

Παρατηρείστε ότι για $A \gg 2$ το κέρδος τάσης του κυκλώματος απλοποιείται στο ακόλουθο:

$$\frac{u_o}{u_i} = -\frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Το τελευταίο ισούται με αυτό που δίνει η ανάλυση για τελεστικό ενισχυτή με άπειρο κέρδος ανοιχτού βρόχου.

Άσκηση 12. Να βρεθεί αναλυτικά η -3dB συχνότητα των παρακάτω κυλωμάτων. Ο τελεστικός ενισχυτής έχει άπειρη αντίσταση εισόδου, μηδενική αντίσταση εξόδου και πεπερασμένο κέρδος ανοιχτού βρόχου, χαμηλοδιαβατής συμπεριφοράς ενός πόλου.



Σχήμα 1. 22

Έστω ότι το κέρδος ανοιχτού βρόχου του τελεστικού ενισχυτή έχει την εξής μορφή:

$$A(j\omega) = \frac{A_o}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}}$$

όπου, A_o είναι το dc κέρδος (ή κέρδος χαμηλών συχνοτήτων) ανοιχτού βρόχου, ω_p είναι η -3dB συχνότητα του κέρδους ανοιχτού βρόχου και $\omega_t \cong A_o \omega_p$ (για $A_o \gg 1$) είναι η συχνότητα μοναδιαίου κέρδους (ή gain-bandwidth product (GBP)), (η ω_t είναι χαρακτηριστική για κάθε ενισχυτή και εκφράζει ουσιαστικά τη μέγιστη συχνότητα στην οποία ο ενισχυτής θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ‘ενισχυτής’, έχοντας οριακά κέρδος μονάδα).

A) Για το πρώτο κύλωμα (Σχήμα 1. 22(α)) ισχύουν τα ακόλουθα:

$$u_o = (0 - u_x)A(j\omega) \Rightarrow u_x = -\frac{u_o}{A(j\omega)}$$

$$i = \frac{u_i - u_x}{R_1} = \frac{u_x - u_o}{R_2}$$

οπότε,

$$\frac{u_o}{u_i} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{A_o} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) + j \frac{\omega}{\omega_p} \frac{1}{A_o} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)} \quad (\text{κέρδος τάσης})$$

Για $A_o \gg \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)$ η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{u_o}{u_i} = - \frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p} \frac{1}{A_o} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right)}$$

το κέρδος χαμηλών συχνοτήτων είναι $-\frac{R_2}{R_1}$ (αναμενόμενο λόγω της αναστρέφουσας συνδεσμολογίας) και ο πόλος του κυκλώματος βρίσκεται πλέον στη συχνότητα:

$$\omega_{-3dB} = \frac{\omega_p A_o}{\frac{R_2}{R_1} + 1} = \frac{\omega_t}{\frac{R_2}{R_1} + 1}$$

(παρατηρείστε ότι ακόμη και για μοναδιαίο κέρδος ($R_1=R_2$) το εύρος ζώνης του κυκλώματος πέφτει στο μισό του GBP)

B) Για το δεύτερο κύκλωμα (Σχήμα 1. 22(β)) έχουμε:

$$u_x = - \frac{u_o}{A(j\omega)}$$

$$i_i = \frac{u_x - u_o}{R_2} = \frac{-\frac{u_o}{A(j\omega)} - u_o}{R_2}$$

ή

$$\frac{u_o}{i_i} = \frac{-R_2}{1 + \frac{1}{A_o} + j \frac{\omega}{\omega_p A_o}} \quad (\text{διαγωγιμότητα})$$

Για $A_o \gg 1$,

$$\frac{u_o}{i_i} = \frac{-R_2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p A_o}}$$

Το $-R_2$ είναι το κέρδος χαμηλών συχνοτήτων του διαγωγού, ενώ το εύρος ζώνης του είναι:

$$\omega_{-3dB} = \omega_p A_o = \omega_t$$

(παρατηρείστε ότι το εύρος ζώνης του κυκλώματος είναι ανεξάρτητο από το κέρδος διαγωγιμότητας και ίσο με το GBP)