Ε. Μ. Πολυτεχνείο
Εργαστήριο Ηλεκτρονικής

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ Ι

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΤΕΥΧΟΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ

Γ. ΠΑΠΑΝΑΝΟΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ : Συναρτήσεις Δικτύων

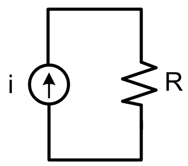
<u>Βασικοί ορισμοί</u>
Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό, χρονικά ανεξάρτητο δίκτυο το οποίο περιέχει μία ανεξάρτητη πηγή τάσης ή ρεύματος σαν είσοδο και η οποία έχει μία οποιαδήποτε κυματομορφή α (.). Ας θεωρήσουμε ακόμη μία τάση μεταξύ δύο οποιονδήποτε κόμβων του δικτύου ή ένα ρεύμα που διαρρέι ένα οποιονδήποτε κλάδο του δικτύου b (.), σαν την έξοδο του συστήματος.
Ορίζουμε το μετασχηματισμό Laplace των δύο συναρτήσεων a και b :

$$A(s) = \mathbf{L}[a(t)]$$
$$B(s) = \mathbf{L}[b(t)]$$

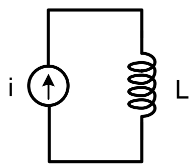
Η συνάρτηση [μεταφοράς] του δικτύου ορίζεται ως ακολούθως :

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

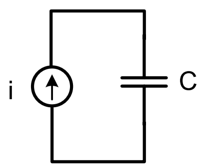
όπου s η μιγαδική συχνότητα $s = \sigma + j\omega$.
Στη γενική περίπτωση, η συνάρτηση του δικτύου $H(s)$ μπορεί να πάρει πολλές μορφές. Αυτό εξαρτάται από το αν η $A(s)$ και η $B(s)$ αναφέρονται σε τάσεις ή ρεύματα.
Ορίζουμε σαν συνάρτηση σύνθετης αντίστασης ενός στοιχείου δύο ακροδεκτών, το λόγο της τάσης που εφαρμόζεται στα άκρα του δια του ρεύματος που το διαρρέει.
Στο επόμενο σχήμα, φαίνονται οι υπολογισμοί της συνάρτησης σύνθετης αντίστασης για την ωμική αντίσταση, το πηνίο και τον πυκνωτή.



$$u = R \cdot i \qquad z = \frac{\mathbf{L}[u]}{\mathbf{L}[i]} = \frac{V}{I} = R$$

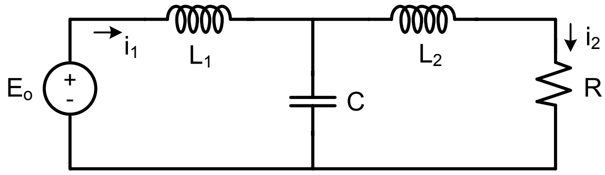


$$u = L\frac{di}{dt} \qquad z = \frac{\mathbf{L}[u]}{\mathbf{L}[i]} = \frac{V}{I} = sL$$
$$i(0_-) = 0$$



$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(t')dt' \qquad z = \frac{\mathbf{L}[u]}{\mathbf{L}[i]} = \frac{V}{I} = \frac{1}{sC}$$
$$u(0_-) = 0$$

<u>Παράδειγμα</u> : Θεωρήστε το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος (βαθυπερατό φίλτρο). Βρείτε τη συνάρτηση του δικτύου $H(s) = \frac{I_2}{E_o}$



$$\left(L_1 s + \frac{1}{Cs}\right) I_1 - \frac{1}{Cs} I_2 = E_o$$

$$-\frac{1}{Cs} I_1 + \left(\frac{1}{Cs} + L_2 s + R\right) I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{E_o Cs}{\begin{vmatrix} L_1 s + \frac{1}{Cs} & -\frac{1}{Cs} \\ -\frac{1}{Cs} & \frac{1}{Cs} + L_2 + R \end{vmatrix}}$$

$$H(s) = \frac{I_2}{E_o} = \frac{1}{L_1 L_2 C s^3 + RCL_1 s^2 + (L_1 + L_2)s + R}$$

<u>Πόλοι, μηδενικά και απόκριση συχνότητας</u>

Αν στη συνάρτηση του δικτύου αντικαταστήσουμε τη μιγαδική μεταβλητή s με την φανταστική συχνότητα $j\omega$, τότε η $H(j\omega)$ παριστά την απόκριση την ημιτονοειδούς μόνιμης κατάστασης σε σχάση με ημιτονοειδές σήμα εισόδου στο σύστημα.
Η $H(j\omega)$ είναι ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος σε σήματα διαφόρων συχνοτήτων.
Η $H(j\omega)$ για συγκεκριμένη συχνότητα ω, είναι ένας μιγαδικός αριθμός ο οποίος σε πολική μορφή εκφράζεται ως ακολούθως :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{\angle H(j\omega)}$$

Η $|H(j\omega)|$ καλείται πλάτος και η $\angle H(j\omega)$ φάση της συνάρτησης δικτύου για την συγκεκριμένη συχνότητα ω.
Όταν η συνάρτηση δικτύου εκφράζει τη συνάρτηση μεταφοράς, συνήθως εκφράζεται με λογαριθμικό μέτρο :

$$\Theta(j\omega) = \ell n\, H(j\omega) = \ell n\, |H(j\omega)| + j\angle H(j\omega)$$

Το πραγματικό μέρος της παραπάνω συνάρτησης ονομάζεται κέρδος και εκφράζεται σε μονάδες που καλούνται nepers :

$$\alpha(\omega) = \ell n |H(j\omega)| \quad \text{nepers}$$

Αν πάρουμε το δεκαδικό λογάριθμο, θα έχουμε :

$$20 \ell og |H(j\omega)| \quad \text{decibels(db)}$$

Η συνδυασμένη πληροφορία πλάτους και φάσης μιας συνάρτησης δικτύου για όλες τις συχνότητες ω, ονομάζεται απόκριση συχνότητας του συστήματος.

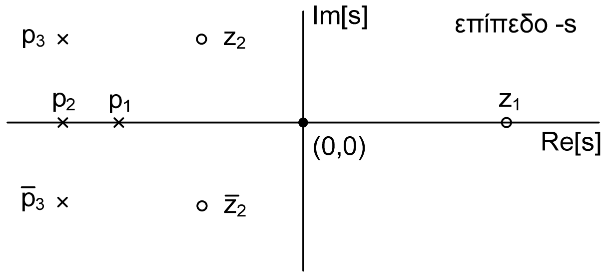
Στη γενική περίπτωση, μια συνάρτηση δικτύου, εκφράζεται σαν λόγος πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές ως ακολούθως :

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_o}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_o}$$

Αν εκφράσουμε τα πολυώνυμα σε παραγοντική μορφή, έχουμε τους πόλους και τα μηδενικά του συστήματος. Οι πόλοι είναι οι ρίζες του πολυωνύμου του παρανομαστή, ενώ τα μηδενικά είναι οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή.
Ας δούμε όλα τα παραπάνω με ένα παράδειγμα.
Έστω σύστημα με τρία μηδενικά και τέσσερις πόλους.
Θα έχει τη μορφή :

$$H(s) = A \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - \bar{z}_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - \bar{p}_3)}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας αριθμητικός συντελεστής A στη συνάρτηση δικτύου καθώς επίσης και ένα ζεύγος συζυγούς μηδενικού ($z_2, \bar{z}_2$) και ένα ζεύγος συζυγούς πόλου ($p_3, \bar{p}_3$).
Η θέση πόλων και μηδενικών, φαίνεται στο επόμενο σχήμα.
Η θέση των πόλων συμβολίζεται με X και των μηδενικών με o.

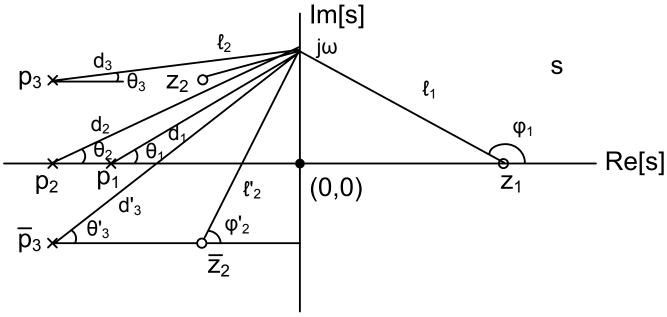


Αν πάρουμε το μέτρο της προηγούμενης συνάρτησης αφού κάνουμε την αντικατάσταση $s = j\omega$, θα έχουμε :

$$|H(j\omega)| = |A| \frac{|j\omega - z_1||j\omega - z_2||j\omega - \bar{z}_2|}{|j\omega - p_1||j\omega - p_2||j\omega - p_3||j\omega - \bar{z}_3|}$$

ή $|H(j\omega)| = |A| \dfrac{l_1 l_2 l_2'}{d_1 d_2 d_3 d_3'}$

με βάση την γραφική αναπαράσταση του παρακάτω σχήματος.



Αν λογαριθμίσουμε, θα έχουμε για το κέρδος :

$$\alpha(\omega) = \ell n|A| = \ell n\, l_1 + \ell n\, l_2 + \ell n\, l'_2 - \ell n\, d_1 - \ell n\, d_2 - \ell n\, d_3 - \ell n\, d'_3$$

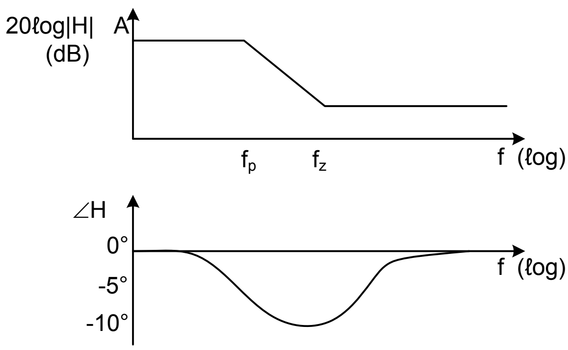
Αντίστοιχα για τη φάση θα έχουμε :

$$\angle H(j\omega) = \angle A + \angle(j\omega - z_1) + \angle(j\omega - z_2) + \angle(j\omega - \bar{z}_2) -$$
$$\angle(j\omega - p_1) - \angle(j\omega - p_2) - \angle(j\omega - p_3) - \angle(j\omega - \bar{p}_3)$$

ή χρησιμοποιώντας τη γραφική αναπαράσταση του προηγούμενου σχήματος :

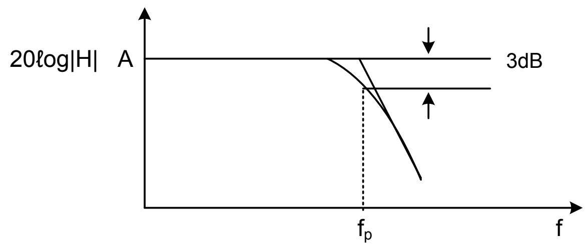
$$\angle H(j\omega) = \angle A + (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi'_2) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta'_3)$$

Μπορούμε τώρα να δούμε τη σχεδίαση της συνάρτησης μεταφοράς πλάτους και φάσης ενός γραμμικού συστήματος, μέσω της γραφικής διαδικασίας του προηγουμένου σχήματος.
Αν κινηθούμε στο πεδίο της φανταστικής συχνότητας για $\omega = 0$ έως ∞, σε κάθε θέση ω θα παίρνουμε και μια οικογένεια διανυσμάτων αναφορικά με τους πόλους και τα μηδενικά του συστήματος, Κάνοντας τις παραπάνω πράξεις με τα μέτρα και τις γωνίες των διανυσμάτων, θα παίρνουμε για κάθε ω το πλάτος και τη φάση της συνάρτησης μεταφοράς.
Η γραφική αναπαράσταση των διαγραμμάτων πλάτους και φάσης ενός συστήματος, δίνεται ως ακολούθως :



Στο συγκεκριμένο γράφημα, το σύστημα παρουσιάζει ένα πόλο στη συχνότητα f_p και ένα μηδενικό στη συχνότητα f_z. Τα διαγράμματα αυτά, ονομάζονται διαγράμματα Bode πλάτους και φάσης αντίστοιχα.
Παρατηρούμε ότι ο οριζόντιος άξονας (των συχνοτήτων) είναι σε λογαριθμική κλίμακα, ενώ ο κατακόρυφος άξονας (κέρδος-φάση) σε γραμμική κλίμακα. Ο άξονας του κέρδους όμως είναι εκφρασμένος σε dB.

Για το διάγραμμα πλάτους παρατηρούμε ότι ξεκινάει με σταθερή τιμή A που είναι η τιμή αριθμητικού συντελεστή της συνάρτησης συστήματος και συνεχίζει σταθερά μέχρι να συναντήσει τον πόλο. Από εκεί και πέρα, πέφτει το κέρδος με ρυθμό 20dB/δεκάδα. Για την ακρίβεια, στη συχνότητα f_p, το κέρδος έχει ήδη πέσει κατά 3dB της αρχικής τιμής όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

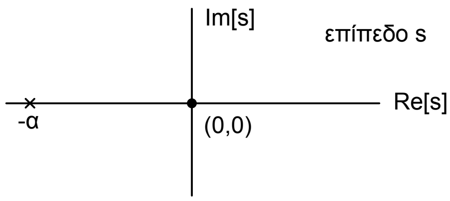


Στη συχνότητα του μηδενικού f_z, το σύστημα συμπεριφέρεται αντίστροφα : Το κέρδος ανεβαίνει με ρυθμό 20dB/δεκάδα. -20dB/δεκάδα από τον πόλο και +20dB/δεκάδα από το μηδενικό, έχουν σαν αποτέλεσμα το κέρδος να παραμένει σταθερό για συχνότητες $> f_z$.
Για το διάγραμμα φάσης παρατηρούμε ότι ξεκινά από τις 0° (εφόσον το A είναι θετικός αριθμός, 180° αν A<0).
Ένας πόλος έχει σαν αποτέλεσμα η φάση να πέσει κατά 45°. Ένα μηδενικό στο ΑΡΙΣΤΕΡΟ ημιεπίπεδο, έχει σαν αποτέλεσμα άνοδο της φάσης κατά 90°. Πάλι στη συχνότητα f_z η άνοδος έχει γίνει κατά 45°. Αν το μηδενικό είναι το ΔΕΞΙΟ ημιεπίπεδο, τότε η επίδρασή του στη φάση είναι όπως και του πόλου : πτώση της φάσης κατά 90°. Το πλάτος δεν επηρεάζεται : +20dB/δεκάδα είτε το μηδενικό είναι στο δεξί είτε στο αριστερό ημιεπίπεδο.
Πόλος στο δεξί ημιεπίπεδο σημαίνει ότι το σύστημά μας είναι ασταθές. Δεν θα εξετάσουμε εδώ τέτοια συστήματα.

Η συνύπαρξη πόλου και μηδενικού στην ίδια συχνότητα, σημαίνουν αλληλοαναίρεση των φαινομένων στη συνάρτηση μεταφοράς.

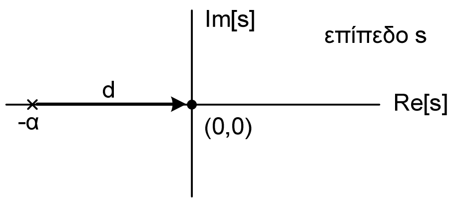
Γεωμετρική εξήγηση μορφής διαγραμμάτων Bode

Έστω μια απλή συνάρτηση μεταφοράς μιας σταθεράς χρόνου (ενός πόλου) : $H(s)=\dfrac{1}{(s+\alpha)}$. Ο πόλος στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι στη θέση –α όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα ($\alpha \in R$)



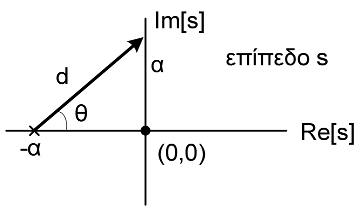
Για να δημιουργήσουμε το διάγραμμα Bode της παραπάνω συνάρτησης μεταφοράς, σχεδιάζομε το διανύσματα τα οποία έχουν αρχή στο σημείο (-α) και τέλος οπουδήποτε στον φανταστικό άξονα από 0 έως ∞. Άρα, σχεδιάζουμε το μέτρο και τη φάση της $H(s)$ για την $s=j\omega$ (εφόσον το τέλος του διανύσματος είναι πάντα στον φανταστικό άξονα $Im[s]=j\omega$).

(α) Το πρώτο ενδιαφέρον σημείο είναι για $\omega=0$ (dc). Το αντίστοιχο διάνυσμα φαίνεται στο επόμενο σχήμα :



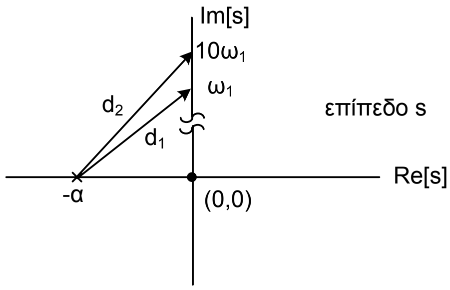
Προφανώς το διάνυσμα έχει μέτρο d=α και φάση θ=0°. Άρα το dc κέρδος είναι : $|H(j0)|=\dfrac{1}{\alpha}$ και σε dB : $20\ell og\dfrac{1}{\alpha}$

(β) Το επόμενο σημείο είναι στη συχνότητα που ταυτίζεται κατά μέτρο με την τιμή του πόλου δηλ. ω=α. Το διάνυσμα φαίνεται παρακάτω :



Προφανώς εδώ $d = \alpha\sqrt{2}$ και $\theta = 45°$. Έτσι : $|H(j\alpha)| = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$ και σε dB $20\,\ell og \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}} = -20\,\ell og\sqrt{2} - 20\,\ell og\alpha = -3dB - 20\,\ell og\,\alpha$ δηλαδή είναι -3dB χαμηλότερα της dc τιμής. Στη συχνότητα που έχει τιμή το μέτρο του πόλου λοιπόν έχουμε τη συχνότητα γονάτου που έχουμε ήδη αναφέρει.

(γ) Σε δύο συχνότητες ω_1 και ω_2 όπου $\omega_2 = 10\omega_1$ και $\omega_1 >> \alpha$, τα διανύσματα είναι όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα :

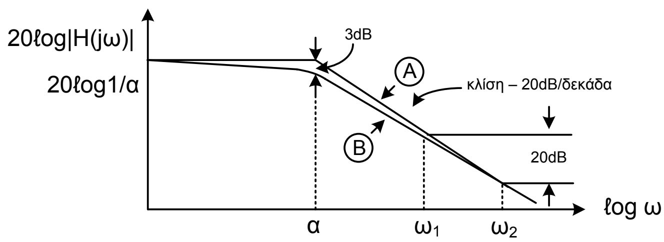


Εξαιτίας του γεγονότος ότι $\omega_1 >> \alpha$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d_1 \approx \omega_1$ και φυσικά $d_2 \approx \omega_2$). Έτσι $|H(j\omega_1)| = \dfrac{1}{d_1}$ και $|H(j\omega_2)| = \dfrac{1}{d_2}$.

Άρα $20\,\ell og|H(j\omega_1)| \approx -20\,\ell og\,\omega_1$ και

$$20\,\ell og|H(j\omega_2)| \approx -20\,\ell og\,\omega_2 = -20\,\ell og 10\omega_1 = -20dB - 20\,\ell og\,\omega_1$$

Επομένως το μέτρο των δύο διανυσμάτων που απέχουν σε συχνότητα μια δεκάδα μεταξύ τους, παρουσιάζει διαφορά κατά 20dB.
Από τα (α), (β) και (γ) προκύπτει το διάγραμμα Bode πλάτους για τη συνάρτηση μεταφοράς ενός πόλου.



Η καμπύλη Α είναι η τμηματικά γραμμική προσέγγιση και η καμπύλη Β είναι η πραγματική.